ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 314 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) a) $p(z)$ ve $q(z)$ $n.$ ve $k.$ dereceden iki polinom olsun. Bu durumda $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ fonksiyonunun diferansiyellenebileceği en geniş kümeyi bulunuz.

b) $f(z)=\dfrac{2+3i}{2z^2-(2+5i)z-2+i}$ fonksiyonunun diferansiyellenebileceği en geniş kümeyi bulunuz.

2) a) $f(z)=e^{x^2-y^2}\left[\cos(2xy)+i\sin(2xy)\right]$

b) $g(z)=\sqrt{z^3+1}$

fonksiyonlarının analitik olduğu kümeyi bulunuz.

3) Harmonik fonksiyon, harmonik eşlenik tanımlarını yapınız. v_1 ve v_2, u nun iki harmonik eşleniği ise v_1-v_2 sabittir. Gösteriniz. Ayrıca $u=\sin x\cosh y$ fonksiyonu harmonik midir? Varsa harmonik eşleniğini bulunuz.

4) f, B bölgesinde analitik olsun. Aşağıdaki koşullardan herhangi biri bütün $z\in B$ noktaları için gerçeklenirse f, B de sabit olur. Gösteriniz.

i) $\operatorname{Im} f(z)=sabit$

ii) $\overline{f}$ analitik

iii) $\arg f=sabit$

5) a) e^{e^z} nin gerçel ve sanal kısımlarını bulunuz.

b) $(1+i)^{1+i}$ nin bütün değerlerini bulunuz.

Not: Sınav **12.07.2021** Pazartesi günü **09:00-11:00** arasında gerçekleşecektir. Süre 120 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar **değerlendirilmeyecektir.** Tüm sorular eşit puanlıdır. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

– CEVAP ANAHTARI –

1) a) $p(z)$ ve $q(z)$ sırasıyla n. ve k. dereceden iki polinom olsun. Bu durumda, $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ fonksiyonunun diferansiyellenebileceği en geniş kümeyi bulunuz.

Çözüm: Polinom fonksiyonların tüm kompleks düzlemde dif. lenebileceğini biliyoruz. Buna göre $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ fonksiyonunda $p(z)$ ve $q(z)$ birer polinomdur. O halde $f(z)$ fonksiyonu $q(z)=0$ olduğu durum dışında her noktada dif. bilir. Dolayısıyla $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ fonksiyonunun dif. bildiği en geniş küme

$$D=\mathbb{C}\setminus\{z: q(z)=0\}$$

kümesidir.

b) $f(z)=\dfrac{2+3i}{2z^2-(2+5i)z-2+i}$ nin dif. bileceği kümeyi bulunuz.

Çözüm: a) şıkkından faydalanarak söyleyebiliriz ki;

$$D=\mathbb{C}\setminus\{z: 2z^2-(2+5i)z-2+i=0\}$$

$2z^2-(2+5i)z-2+i=0$ denkleminin köklerini bulalım.

$$\Delta=b^2-4.a.c=(2+5i)^2-4.2.(-2+i)=4-25+20i+16-8i$$
$$=\underline{\underline{-5+12i}}$$

$$z_{1,2}=\frac{(2+5i)\mp\sqrt{-5+12i}}{2.2}$$

$-5+12i$ nin kareköklerini bulalım:

$$z=\mp\left[\sqrt{\frac{-5+\sqrt{25+144}}{2}}+i\sqrt{\frac{5+\sqrt{25+144}}{2}}\right]=\mp\left[2+3i\right]$$

O halde;

$$z_1=\frac{\cancel{2}+5i-\cancel{2}-3i}{4}=\frac{i}{2} \quad \text{ve} \quad z_2=\frac{2+5i+2+3i}{4}=1+2i$$

$$D=\mathbb{C}\setminus\left\{z: z=\frac{i}{2} \text{ ve } z=1+2i\right\}$$

2) a) $f(z) = e^{x^2-y^2}[\cos(2xy) + i\sin(2xy)]$

Çözüm: önce dif. bileceği kümeyi bulmalıyız.

1. adım $f(z)$ nin tanım kümesi $T = \mathbb{C}$ olup $D_0 = \text{iç}\, T = \mathbb{C}$-dir.

2. adım $f(z)$ nin sürekli olduğu küme $D_1 = \mathbb{C}$-dir.

3. adım $u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ $\quad v(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$

$$\left.\begin{aligned}
u_x &= 2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy - 2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy \\
u_y &= -2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy - 2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy \\
v_x &= 2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy \\
v_y &= -2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy
\end{aligned}\right\}$$

fonksiyonları $\mathbb{R}^2$-de yani $\mathbb{C}$-de sürekli olduğundan $D_2 = \mathbb{C}$-dir.

4. adım $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır. $D_3 = \mathbb{C}$ olarak bulunur.

5. adım $D = D_0 \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \mathbb{C}$ dir. $f(z)$-nin dif. lenebildiği küme $D = \mathbb{C}$-dir.

$A = \text{iç}\, D = \text{iç}\, \mathbb{C} = \mathbb{C}$ olup $f(z)$-nin analitik olduğu küme $\mathbb{C}$-dir.

b) $f(z) = \sqrt{z^3+1}$

Çözüm: $z = x+iy$ denirse,

$$z^3+1 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i + 1$$
$$= (x^3 - 3xy^2 + 1) + i(3x^2y - y^3)$$

$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ bulunur. $f(z)$ fonksiyonu,

$A = \mathbb{C} \setminus \{x+iy : u(x,y) \leq 0,\ v(x,y) = 0\}$ kümesinde analitiktir.

$$A = \mathbb{C} \setminus \{x+iy : x^3 - 3xy^2 + 1 \leq 0,\ 3x^2y - y^3 = 0\}$$

kümesinde analitik olur. A kümesini daha sade hale getirecek olursak;

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 1 \leq 0 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases}$$

$3x^2y - y^3 = 0 \Rightarrow y(3x^2 - y^2) = 0 \Rightarrow y = 0 \wedge y = \sqrt{3}x \wedge y = -\sqrt{3}x$

$y = 0$ için $x^3 + 1 \leq 0 \Rightarrow x^3 \leq -1 \Rightarrow x \leq -1$

$y = \mp\sqrt{3}x$ için $-8x^3 + 1 \leq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

bulunur ve $f(z)$ fonksiyonu

$A = \mathbb{C} \setminus \left[\{x+iy : x \leq 1,\ y = 0\} \cup \{x+iy : x \geq \frac{1}{2},\ y = \mp\sqrt{3}x\}\right]$ analitiktir.

3) $B \subseteq \mathbb{R}^2$ bir bölge olmak üzere $u: B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. u'nun birinci ve ikinci mertebeden kısmî türevlerinin B bölgesinde var ve sürekli olduğunu kabul edelim. Ayrıca her $(x,y) \in B$ için,

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$

oluyorsa u'ya B bölgesinde "harmonik fonksiyon" denir.

u ve v fonksiyonları bir B bölgesinde harmonik olsun. $f(z) = u + iv$ fonksiyonu B bölgesinde analitik oluyorsa v'ye u'nun "harmonik eşleniği" denir.

$u = \sin x \cosh y$ fonksiyonu harmonik mi bakalım:

$u_x = \cos x \cosh y$; $u_{xx} = -\sin x \cosh y$

$u_y = \sin x \sinh y$, $u_{yy} = \sin x \cosh y$

$u_{xx} + u_{yy} = -\sin x \cosh y + \sin x \cosh y = 0$ olduğundan harmoniktir.

Cauchy-Riemann denklemlerinden,

$$u_x = v_y \Rightarrow \cos x \cosh y = v_y \Rightarrow v = \int \cos x \cosh y \, dy$$

$$= \cos x \sinh y + \varphi(x)$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow \sin x \sinh y = -(-\sin x \sinh y + \varphi'(x)) \Rightarrow \underline{\underline{\varphi(x) = c}}$$

olarak bulunur. $u = \sin x \cosh y$-nin harmonik eşleniği,

$$\underline{v = \cos x \sinh y + c}.$$

v_1, v_2, u nun iki harmonik eşleniği ise $v_1 - v_2$ sabittir; $f_1 = u + iv_1$, $f_2 = u + iv_2$ aynı bölgede iki analitik fonksiyondur. Buradan $f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$, yani $Re(f_1 - f_2) = 0$ dır. $\overset{\text{Teo.}}{\Rightarrow}$ $f_1 - f_2 =$ sabit $\Rightarrow v_1 - v_2$ sabit olur.

-o-

(4) (i) derste yapıldı.

(ii) $\bar{f}$ analitik ise f = sabittir:

$f(z) = u + iv$ ise $\bar{f}(z) = u - iv$ dır. $f, \bar{f}$ B de analitik olduğundan $F = f + \bar{f} = 2\operatorname{Re} f$ de B de analitiktir ve $\operatorname{Im} f = 0$ dır. O halde (i) gereği F sabittir.

Böylece $\operatorname{Re} f$ = sabit olur. Yani f sabit olur.

(iii) $\arg f$ = sabit olsun. $f = u + iv$,

$u = k \cdot v$ yazabiliriz. ($v \neq 0$ olduğu sürece)

$0 = \underline{u - kv} = \operatorname{Re}(1+ik)f = 0$ dır. Böylece $(1+ik)f$ = sabit olur.

yani f sabit olur.

$$(1+ik)f = (1+ik)(u+iv) = (1+ik)(kv+iv)$$
$$= kv + iv + ik^2 v - kv = iv + ik^2 v$$
$$= i(v + k^2 v) \Rightarrow \underline{\operatorname{Re}(1+ik)f = 0} \text{ dır.}$$

$\Rightarrow f$ sabittir.

(5) a) e^{e^z} ; $e^z = e^{x+iy} \Rightarrow e^z = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow$

$$e^{e^z} = e^{e^x(\cos y + i \sin y)} = e^{e^x \cos y} \cdot e^{i e^x \sin y}$$

$$= \underbrace{e^{e^x \cos y} \cdot \cos(e^x \sin y)}_{\operatorname{Re}(e^{e^z})} + i \underbrace{e^{e^x \cos y} \cdot \sin(e^x \sin y)}_{\operatorname{Im}(e^{e^z})}$$

b) $$(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\left(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i\right)}$$

$$= e^{\log\sqrt{2}} \cdot e^{i\pi/4} \cdot e^{2k\pi i} \cdot e^{i\log\sqrt{2}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{4}+2k\right)\pi}$$

$=$